ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
————-

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II
NĂM HỌC 2014-2015
——oOo——-

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT2306-2** Số tín chỉ: **3** Đề số: **1**

Dành cho sinh viên khoá: **K57** Ngành học: **Toán học**

Thời gian làm bài **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (3 điểm) Xét bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền sóng

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), x+t > 0, t > 0,$$

với điều kiện biên $u(-t,t) = 2t, t \geq 0$, và các điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, x \geq 0.$$

(a) Giải bài toán trên.
(b) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/2, 1, 2$. Hỏi $u(x,1)$ có khả vi theo x không?

Câu 2. (4 điểm) Một thanh kim loại chiều dài 1 có nhiệt độ trên thanh tuân theo phương trình truyền nhiệt với hệ số khuếch tán 1. Nếu đặt hệ trục tọa độ lên thanh sao cho một đầu tại gốc và đầu kia tại 1 thì đầu tại gốc có nhiệt độ 0, đầu tại $x = 1$ không tản nhiệt và nhiệt độ ban đầu của thanh x.
(a) Thiết lập bài toán biên hỗn hợp cho hàm nhiệt độ $u(x,t)$.
(b) Giải bài toán trên. Tính $u(1,t)$. Từ đó chứng minh $0 < u(x,t) < 1$ khi $0 < x < 1, y > 0$.
(Gợi ý: dùng nguyên lý cực đại và $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.)

Câu 3. (5 điểm) Xét bài toán biên cho phương trình Laplace trong nửa dải

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, Q = \{(x,y) |\, 0 < x < 1, y > 0\},$$

với điều kiện biên $u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0$ khi $y \geq 0$, và $u(x,0) = x$ khi $0 \leq x \leq 1$.
(a) Với $M > 0$ xét tích phân năng lượng

$$I(M) = \iint\limits_{Q_M} (v_x^2(x,y) + v_y^2(x,y))dxdy, Q_M = \{(x,y) |\, 0 < x < 1, 0 < y < M\}.$$

Chứng minh rằng, nếu $v(x,y)$ là hiệu của hai nghiệm của bài toán trên thì

$$I(M) = \int_0^1 v(x,M)v_y(x,M)dx.$$

(b) Giả sử ta chỉ tìm nghiệm thỏa mãn $\sup\limits_{x\in[0,1], y>0} |u(x,y)| < \infty, \lim\limits_{y\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} u_y(x,y) = 0$. Hãy chứng minh bài toán trên có duy nhất nghiệm.
(c) Giải bài toán trên. Hỏi $u(x,y) + u(1-x,y)$ thỏa mãn bài toán nào? Từ đó hãy tính $u(1/2,y)$ khi $y > 0$.

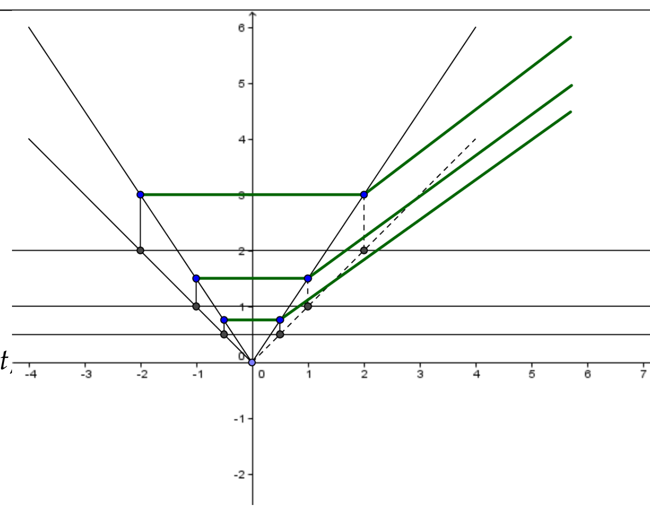
Chú ý: Sinh viên được dùng tài liệu của mình, không được dùng tài liệu của sinh viên khác.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2014-2015
Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT2306-2** Số tín chỉ: **3** Đề số: **1**
Dành cho sinh viên khoá: **K57** Ngành học: **Toán học**

Lời giải 1. [3 điểm]

(a) Đường đặc trưng $x = t$ chia miền xác định $x + t > 0, t > 0$ thành hai miền: $$D_1 = \{(x,t)\| \|0 < t \leq x\} \text{ và } D_2 = \{(x,t)\| -t < x < t\}.$$	**0,5**
TH1: $(x_0, t_0) \in D_1$, ta sử dụng công thức D'Alembert: $$u(x_0,t_0) = \frac{u(x_0+t_0,0)+u(x_0-t_0,0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} u_t(y,0)dy = x_0 + t_0.$$	**0.5**
TH2: $(x_0, t_0) \in D_2$ ta dựng hình bình hành có các cạnh là các đường đặc trưng, một cạnh nằm trên đường $x = t$, nhận (x_0, t_0) là một đỉnh của nó. Khi đó bốn đỉnh có tọa độ $$(x_0,t_0), (\frac{x_0-t_0}{2}, \frac{t_0-x_0}{2}), (0,0), (\frac{x_0+t_0}{2}, \frac{x_0+t_0}{2})$$	**0.5**
Khi đó, áp dụng công thức hình bình hành $$u(x_0,t_0) = 2t_0.$$	**0.5**
(b) Với $t = 1/2, 1, 2$, vẽ đồ thị $$u(x,t) = \begin{cases} 2t & \text{khi } -t < x < t, \\ x+t & \text{khi } x \geq t. \end{cases}$$  .	**0.5**
Hàm $u(x,1)$ không có đạo hàm theo x tại $x = 1$.	**0.5**

Lời giải 2. [4 điểm]

(a) Thiết lập bài toán $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), 0 < x < 1, t > 0, \text{(hệ số khuếch tán 1)}$$ $$u(0,t) = u_x(1,t) = 0, t \geq 0, \text{(tại } x = 0 \text{ có nhiệt độ 0, không tản nhiệt tại } x = 1)$$ $$u(x,0) = x, 0 \leq x \leq 1 \text{(nhiệt độ ban đầu)}.$$	**1**
(b) Công thức chuỗi nghiệm $$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin((n+1/2)\pi x) e^{-(n+1/2)^2\pi^2 t}$$	**1**
với các hệ số $$a_n = 2\int_0^1 x \sin((n+1/2)\pi x)dx = \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}.$$	**0.5**
Khi đó $$u(1,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8e^{-(n+1/2)^2\pi^2 t}}{\pi^2(2n+1)^2}.$$	**0.5**
Có $$u(0,t) = 0, 0 \leq u(x,0) = x \leq 1 \text{ khi } 0 \leq x \leq 1,$$ và $$0 < u(1,t) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^2} = 1 \text{ khi } t \geq 0$$ nên theo nguyên lý cực đại $$0 \leq u(x,t) \leq 1.$$	**0.5**
Do $u(x,t)$ không là hằng nên ta có đpcm.	**0.5**

Lời giải 3. [5 điểm]

(a) Do v là hai nghiệm của bài toán nên nó thỏa mãn $$v_{xx} + v_{yy} = 0, v_x(0,y) = v_x(1,y) = v(x,0) = 0.$$	**0.5**
Do đó, bằng tích phân từng phần ta có $$\iint_{Q_M} v_x^2(x,y)dxdy = -\int_0^M \int_0^1 v(x,y)v_{xx}(x,y)dxdy,$$ $$\iint_{Q_M} v_y^2(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(v(x,M)v_y(x,M) - \int_0^M v(x,y)v_{yy}(x,y)dx \right) dy.$$ Khi đó $I(M) = \int_0^1 v(x,M)v_y(x,M)dx$.	**1.0**

(b) Do $$\sup_{x\in[0,1],y>0}\lvert v(x,y)\rvert<\infty, \lim_{y\to\infty}\sup_{x\in[0,1]} v_y(x,y)=0$$ nên $\iint\limits_Q (v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y))dxdy=0$. Do đó $v(x,y)=const$ trên Q. Mà $v(x,0)=0$ nên ta có đpcm.	**0.5**
(c) Công thức chuỗi nghiệm $$u(x,y)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\pi y}\cos(n\pi x)$$	**1**
trong đó các hệ số $$a_0=\int_0^1 xdx=1/2, a_n=2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx=\frac{2(-1+(-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$	**1**
Có $u(x,y)+u(1-x,y)$ thỏa mãn phương trình Laplace và các điều kiện biên $$u_x(0,y)-u_x(1-0,y)=u_x(1,y)-u_x(1-1,y)=0, u(x,0)+u(1-x,0)=1.$$	**0.5**
Do đó $u(x,y)+u(1-x,y)=1$ hay $u(1/2,y)=1/2$.	**0.5**

Hà nội, ngày 22 tháng 05 năm 2015
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

TS. Đặng Anh Tuấn